الگوريتمي جديد بر اساس اتوماتاي يادگير
براي يافتن پارامترهاي ويولت

محمدرفيع خوارزمي محمدرضا ميبدي
دانشكده مهندسي كامپيوتر
دانشگاه صنعتي اميركبير
تهران، ايران

چكيده

ويولتها قادر هستند كه يك تابع را در دقتهاي مختلف تقريب بزنند. اين خاصيت آنها را براي مدل سازي و تقريب سيستمهاي غير خطي سيار مناسب ساخته است. براي بدست آوردن يك تقريب مناسب محاسبه پارامترهاي توابع پايه ويولت از اهميت زيادي برخوردار است. روشهاي متعددي از جمله بيان ويولتها به شكل شبكه هاي عصبي (ويونت) و استفاده از الگوريتمهاي انتشار خطا به عقب و يا توابع پايه شعاعي براي آموزش آنها جهت محاسبه پارامترهاي توابع پايه بكار برده شده است. در اين مقاله روش جديدي بر اساس اتوماتاي يادگير براي محاسبه پارامترهاي ويولت ارائه گرديده است. روش پيشنهادي از قدرت تصميم گيري و جستجوي اتوماتاي يادگير استفاده كرده و در هر مرحله با اضافه كردن ويولت جديد به تقريب قبلي و حذف ويولتهايي كه به كاهش خطا كمكي نمي كنند سعي در كاهش خطا مي نمايد. روشهاي پيشنهادي بر خلاف روش يادگيري L_2 كه نياز به محاسبات بسيار بالائي(از جمله معكوس كردن يك ماتريس با ابعاد بالا براي تعداد زياد نمونه ها) از محاسبات كمتر و بسيار ساده تري برخوردار است. همچنين بر خلاف روشهاي بر پايه شبكه هاي عصبي كه داراي ساختار ثابتي هستند داراي ساختاري پويا مي باشد يعني تعداد توابع پايه از قبل مشخص نميگردد بلكه در حين فرايند تقريب تعيين ميشود. روش پيشنهادي برروي مسائل متنوعي آزمايش شده است و نتايج بسيارخوبي بدست آمده است.

كلمات كليدي: *ويولت، اتوماتاي يادگير، الگوريتمهاي يادگيري، شبكه هاي عصبي*

۱-مقدمه

نمايش يك سيگنال به صورت بسط يك سري توابع پايه نقش مهمي در پردازش سيگنال ، مدل سازي و تقريب توابع دارد. به عنوان مثال از بسط فوريه در دستگاه مثلثاتي براي پردازش سيگنال در حوزه فركانس ويا از شبكه هاي عصبي به عنوان ابزاري براي مدل سازي و تقريب سيستم هاي غير خطي بر اساس داده هاي ورودي-خروجي استفاده شده است. اما ضرائب فوريه بيشتر خواص فركانسي سيگنال را بيان مي كنند. بنابراين بسط يك سيگنال بر اساس يك سري توابع پايه كه به خوبي در بعد زمان و فركانس متمركز شده باشند بسيار مفيد خواهد بود. بسط توابع با توجه به تئوري ويولت ،كه يك سيگنال را به صورت مجموعه اي از توابع پايه در دقتهاي مختلف نشان مي دهد اين نياز را برآورده مي سازد[۱]. كارهاي اخير نشان داده است كه توابع پايه اي وجود دارد كه هر تابع قابل اندازه گيري روي محور حقيقي R را مي توان با آنها تقريب زد[٤] [۳] [۲]. در سالهاي اخير كارهايي در ارتباط با تلفيق شبكه هاي عصبي وبسط ويولت انجام شده است. زانگ و بنونسيت [٤] يك شبكه (۱+۱/۲) لايه اي با الگوريتم آموزش انتشار خطا به عقب براي تعيين پارامترهاي ويولت پيشنهاد كرده اند. بخشي و استفانوپولس[1] [5] شبكه اي به نام ويونت پيشنهاد نمودند كه در آن از الگوريتم انتشار خطا به عقب براي آموزش آن استفاده ميشود. براي تخمين ضرائب ويولت توسط شبكه هاي ويونت ، آموزش دقيق شبكه معمولاً با مشكل مواجه مي شود و يا اينكه خطا از

[۱] Bakhshi and Stephanopoulos

حد معيني كمتر نمي شود. در روش يادگيري L_2 خطاي بدست آمـده حداقل خواهد بود[٦] اما محاسبات زياد از جمله محاسبه معكوس يك ماتريس با ابعاد بزرگ از مشكلات آن مي باشد.

در اين مقاله روشي مبتني بر اتوماتاي يادگير براي تعين پارامترهـاي ويولت بمنظور تقريب توابع پيشنهاد ميگـردد. يكـي از مزيتهـاي روش پيشنهادي نسبت به ويونت تعيين تعداد توابع پايه به صورت پويـا مـي باشد. بدين معني كه تعداد توابع پايه از قبل مشخص نمي باشـد بلكـه همزمان با فرايند تقريب مشخص مي شود. در اين روش در هر مرحلـه با اضافه كردن و يا كـم كـردن يـك ويولـت سـعي در كـاهش خطـا ميشود. نتايج شبيه سازيها با روشهاي پيشنهادي نشان مي دهد كه بـا تعداد توابع پايه كمتر ميتوان به نتايجي مشابه روشهاي موجود دسـت يافت.

قسمتهاي بعدي مقاله بصورت زير سازماندهي شده اند. خلاصـه اي از تئوري ويولت در بخش ۲ و مروري بر اتوماتاهاي يـادگير در بخـش ۳ امده است. در بخش ٤ الگوريتم هاي يادگيري ويولت را مرور خواهيم كرد. الگوريتمهاي پيشنهادي در قسمت ٥ و نتـايج شـبيه سـازي بـر روي چند مساله نمونه در قسمت٦ امده است. و در انتها نتايج را مـورد بررسي قرار خواهيم داد.

۲-اصول ويولت[۲]

تئوري ويولت ابتـدا توسـط مورلـت و گورسـمن [۳] در زمينـه پـردازش سيگنال مطرح شد [۷] و سپس توسط دوبيچي[٤] و مالات[5] ادامه يافت [۳] [۲] [۸]. بر اساس اين تئوري تمام توابع حقيقي $F(X)\in L^2(R)$ مي تواند به صورت تركيب خطي از يـك سـري توابـع پايـه متعامـد ويولت به فرم $\psi_{m,k}(x)$ بيان شود.

$$F(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{m,k}\psi_{m,k}(x) \qquad (۱)$$

و

$$\psi_{m,k}(x) = 2^{-m/2}\,\psi(2^{-m}x - k) \qquad m,k\in z$$

اگر تابع $F(x)$ داراي متوسط صفر نباشدتقريب اوليه تابع با استفاده از يك تابع پايه $\phi_{0,k}(x)$ به نام تابع مقياس كننده آغاز مي شود.

$$F_0(x) = \sum_k a_{0,k}\phi_{0,k}(x) \qquad (۲)$$

اكنون مي توانيم تابع $F(x)$ را به صورت زير بيان كنيم

(۳)

$$F_m(x) = F_0(x) + \sum_m\sum_k d_{m,k}\psi_{m,k}(x)$$

بنابر اين خواهيم داشت

$$F_0(x) = \sum_k a_{0,k}\phi_{0,k}(x)$$

$$F_{-1}(x)=F_0(x)+\sum_k d_{0,k}\psi_{0,k}(x)$$

$$F_{m-1}(x)=F_m(x)+\sum_k d_{m,k}\psi_{m,k}(x)$$

و اين عمل تا زماني كه يك تقريب مناسب بدست ايد ادامـه پيـدا مـي كند. تابع Haar يكي از اين توابع پايه مي باشد كه به صورت زير بيان مي شود

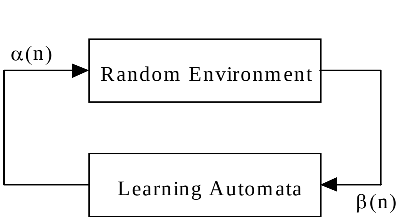
$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<0.5\\ -1 & 0.5\le x<1\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (٤)$$

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0\le 1<1\\ 0 & otherwis\end{cases}$$

يك شكل از نمايش معادله (۱) بيان آن در قالب شبكه هـاي عـصبي مي باشد. اين شبكه ها كـه ويونـت ناميـده ميـشوند توسـط بخـشي و استفانوپولس در سـال ۹۳ معرفـي شـدند[۹] [۵]. آنهـا ويونتهـا را بـه صورت يك شبكه عصبي چند دقتي سلسه مراتبي با يك لايـه مخفـي كه توابع فعاليت نرونهاي آنها توابع پايه متعامد بودند در نظر گرفتنـد . البته مي توان به جاي ويولتهاي متعامد يكه از نمونه هاي ديگر ويولتها نيز استفاده كرد. براي طراحي كامل شبكه هاي ويونت بايد نوع توابـع بكاررفته، تعداد گره ها يعني تعداد ويولتهـا و يـك الگـوريتم يـادگيري براي بدست آوردن ثابتهاي a و d را مشخص كرد

۳- اتوماتاي يادگير

۳-۱- اتوماتاي يادگير: اتوماتاي يادگير يك مدل انتزاعـي اسـت كـه تعداد معدودي عمل را مي تواند انجام دهـد. هـر عمـل انتخـاب شـده توسط محيطي احتمالي ارزيابي شده و پاسخي به اتوماتاي يادگير داده مي شود. اتوماتاي يادگير از اين پاسخ اسـتفاده نمـوده وعمـل خـود را براي مرحله بعد انتخاب مي كند[۱۲][۱۱] [۱۰]. شكل ۱ ارتباط بين اتوماتاي يادگير و محيط را نشان مي دهد.



شكل ۱: ارتباط بين اتوماتاي يادگير و محيط

Wavelet ۲
Grossman and Morlet ۳
Daubechies ٤
Mallat ٥

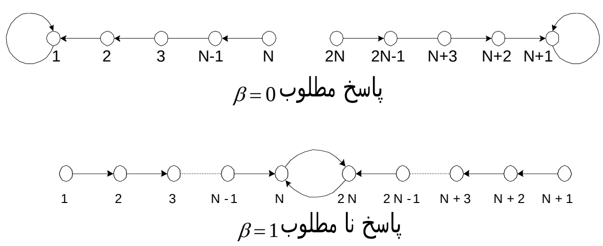
۲-۳- محـــیط [۶]: محیط را مي تـوان توسـط سـه تـايي $E \equiv \{\alpha,\beta,c\}$ نـشان داد کـه در آن $\alpha \equiv \{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r\}$ مجموعـه وروديهـا ، $\beta \equiv \{\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\}$ مجموعـه خروجيهـا و $c \equiv \{c_1,c_2,...,c_r\}$ مجموعه احتمالهاي جريمه مي باشد. هر گاه β مجموعه دو عضوي باشد ، محيط از نوع P مي باشد. در چنين محيطي $\beta_1 = 1$ به عنوان جريمه و $\beta_2 = 0$ به عنوان پاداش در نظر گرفته مي شود. در محيط از نوع Q ، $\beta(n)$ مي تواند به طور گسسته يـك مقدار از مقادير محدود در فاصله [0,1] و در محيط از نوع S، $\beta(n)$ متغير تصادفي در فاصله [0,1] است.

c_i احتمال اينکه عمل α_i نتيجه نامطلوب[۷] داشته باشد مي باشد. در محيط ايستا[۸] مقادير c_i بدون تغيير مي مانند ، حال آنکه در محيط غير ايستا[۹] اين مقادير در طي زمان تغيير مي کنند. اتوماتاي يادگيربه دو گروه با ساختار ثابت و با ساختار متغير تقسيم مي گردند.

۲-۳-اتوماتاي يادگير با ساختار ثابت [۱۰]:

اتوماتاي يادگير با ساختار ثابت توسط ۵ تائي $\{\alpha, \beta, F, G, \phi\}$ نشان داده مي شود که در آن $\alpha \equiv \{\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_r\}$ مجموعه عمل هاي[۱۱] اتوماتا $\beta \equiv \{\beta_1,\beta_2,....,\beta_m\}$ مجموعه وروديهاي اتوماتا $\phi \equiv \{\phi_1,\phi_2,...,\phi_s\}$ مجموعه وضعيتهاي داخلي اتوماتا ، $F:\phi\times\beta\to\phi$ تابع توليد وضعيت جديد اتوماتا و $G:\phi\to\alpha$ تابع خروجي که وضعيت کنوني را به خروجي بعدي مي نگارد. اکنون به بررسي چند نمونه از اتوماتاهاي با ساختار ثابت مي پردازيم.

۲-۳-۱- اتوماتاي $L_{2N,2}$: اين اتوماتا تعداد پاداش ها و جريمه هاي در يافت شده براي هر عمل را نگهداري کرده و تنها زماني که تعداد جريمه ها بيشتر از تعدادپاداش ها مي گردد ، عمل ديگر را انتخاب مي کند. نمودار تغيير وضعيت اين اتوماتا مطابق شکل ۲ مي باشد.



شکل ۲- نمودار تغيير وضعيت اتوماتان $L_{2N,2}$

Environment [۶]

Unfavorable [۷]

Stationary [۸]

Non-Stationary [۹]

Fixed Structure [۱۰]

Actions [۱۱]

۲-۴- اتوماتاي ياد گير با ساختار متغير [۱۲]: اتوماتاي يادگير با ساختار متغير توسط ۴ تائي $\{\alpha,\beta,p,T\}$ نشان داده مي شود کـه در آن $\alpha \equiv \{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r\}$ مجموعـه عمـل هـاي اتوماتـا $\beta \equiv \{\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\}$ مجموعـه وروديهـاي اتوماتا $p \equiv \{p_1,p_2,...,p_r\}$ بردار احتمال انتخاب هر يك از عملها و $p(n+1) = T[\alpha(n),\beta(n),p(n)]$ الگوريتم يادگيري مي باشد. در اين نوع از اتوماتاها، اگر عمل α_i در مرحله n ام انتخاب شود و پاسخ مطلوب از محيط دريافت نمايد، احتمال $p_i(n)$ افزايش يافته و ساير احتمالها کاهش مي يابند. و براي پاسخ نامطلوب احتمال $p_i(n)$ کاهش يافته و ساير احتمالها افزايش مي يابند. در هر حال، تغييرات به گونه اي صورت مي گيرد تا حاصل جمع $p_i(n)$ ها همواره ثابت و مساوي يك باقي بماند..الگوريتم زير يك نمونه از الگوريتمهاي يادگيري خطي در اتوماتاي با ساختار ثابت است[۱۴] .

الف- پاسخ مطلوب

$$p_i(n+1) = p_i(n) + a[1 - p_i(n)]$$
$$p_j(n+1) = (1-a)\,p_j(n) \qquad j \neq i \quad \forall j$$

ب- پاسخ نامطلوب

$$p_i(n+1) = (1-b)\,p_i(n)$$
$$p_j(n+1) = \frac{b}{r-1} + (1-b)\,p_j(n) \qquad \forall j \quad j \neq i$$

در روابط فوق، a پارامتر پاداش و b پارامتر جريمه مي باشد. با توجه به مقادير a و b سه حالت زير را مي توان در نظر گرفت.

الف زمانيکه a و b با هم برابر باشند، الگوريتم را[۱۳] L_{RP} مي ناميم.

ب-زمانيکه b از a خيلي کوچکتر باشد، الگوريتم را $L_{R\varepsilon P}$ [۱۴] مي ناميم.

پ- زمانيکه b مساوي صفر باشد، الگوريتم را L_{RI} [۱۵] مي ناميم.

۲-۵ - اتوماتاي يادگير با اقدام پيوسته: اين اتوماتا داراي يك اقدام است اما اين اقدام در هر مرحله از تكرار مي تواند مقادير مختلف را اختيار كند[۱۵]. (به بيان ديگر اين انوماتا ميتواند داراي بينهايت اقدام باشد.) اين اقدام به صورت يك متغير تصادفي پيوسته ، x ، كه مقادير خود را در فاصله $[x_{min}, x_{max}]$ اختيار ميكند در نظر گرفته مي شود. بنابراين تابع توزيع احتمال گسسته در هر مرحله از تكرار n با تابع چگالي احتمال f(x,n) جايگزين ميشود كه رابطه زير در مورد آن برقرار است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,n)dx = \int_{x} f(x,n)dx = 1 \qquad f(x,n) \geq 0 \quad \forall n, \forall x$$

تابع توزيع اوليه(مرحله صفر) را تابع يكنواخت به صورت $f(x,0) = \frac{1}{x_{min} - x_{max}}$ در نظر مي گيريم. سپس در هر مرحله

Variable Structure [۱۲]

Linear Reward Pealty [۱۳]

Linear Reward Epsilon Penalty [۱۴]

Linear Reward Inaction [۱۵]

تکرار يك عدد تصادفي $z(n)$ در فاصله[۱ ، ۰] ايجاد كرده و اقدام $x(n)$ به صورتي انتخاب مي شود تا $\int_{x\,min}^{x(n)} f(x,n)dx = z(n)$ بر قرارشود. آنگاه اقدام $x(n)$ بر روي محيط اعمال مي شود. نتيجه اقدام ممكن است به صورت موفقيت يا شكست يا يك تابع ارزيابي به صورت $\beta(n)$ بيان شود. اكنون با توجه به مقدار $\beta(n)$ چگالي احتمال $f(x,n)$ به صورت زير تصحيح مي شود.

$$f(x,n+1) = \begin{cases} a[f(x,n) + \beta H(x,r)] & if \quad x \in X \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$H(x,r) = \lambda \exp\left(-\frac{(x-r)^2}{2\delta^2}\right)$$

كه در آن α به گونه اي انتخاب مي شود تا رابطه $\int_{x\,min}^{x\,max} f(x,n)dx = 1$ برقرار شود. $H(x,r)$ تابع همسايگي متتقارن گوسي شكل و λ وδ پارامترهاي تعيين كننده ارتفاع و عرض تابع همسايگي مي باشند.براي اطلاعات بيشتر درباره اتوماتاهاي يادگير مي توان به [۱۳] [۱۲] [۱۱] مراجعه نمود

٤-ا لگوريتمهاي يادگيري ويونت

معادله (۳) ساختار كلي شبكه ويونت را بيان كرده و نشان مي دهد كه چگونه هر ويولت در فرايند تقريب مشاركت دارد. همچنان نشان مي دهد كه تابع مقياس كننده فقط در مرحله اول تقريب براي ايجاد F_0 بكار مي رود. بعد از ايجاد F_0 تقريب بهتر با اضافه كردن ويولت با همان دقت يعني $m=0$ انجام مي گيرد و F_{-1} را توليد مي كند. اضافه كردن ويولتهاي با دقت بالاتر مثل $m=-1$ باعث تقريب بهتر يعني F_{-2} مي شود. اين فرايند ادامه مي يابد تا تابع اصلي ايجاد شود. اكنون به بررسي روشهاي محاسبه ضرائب شبكه يعني $a_{m,k}$ و $d_{m,k}$ مي پردازيم

نزول در امتداد گراديان[۱٦]: يادگيري در روش نزول در امتداد گراديان شبيه يادگيري انتشار خطا به عقب در شبكه هاي عصبي مي باشد .الگوريتم بر اساس معادله $F(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \psi\left(\frac{x-t_i}{s_i}\right) + \bar{f}$ كه شكل ديگري از معادله (۳) مي باشد عمل مي كند كه در آن $\bar{f}$ مقدار ميانگين تابع $F(x)$ با توجه به نمونه هاي ورودي-خروجي و w, t_i, s_i پارامترهاي ويولت مي باشند. اين الگوريتم از روش جستجو در امتداد گراديان براي حداقل نمودن يك تابع هزينه استفاده مي كند. اگر Θ بردار متغيرهاي كه ميخواهيم محاسبه كنيم يعني $[w_i, t_i, s_i]$ و $N_\Theta(x)$ خروجي شبكه به ازاي ورودي x_k و y_k مقدار واقعي باشد. آنگاه تابع هزينه $J(\Theta, x_k, y_k)$ كه بايستي حداقل شود به صورت زير تعريف مي شود.

$$J(\Theta, x_k, y_k) = \tfrac{1}{2}[N_\Theta(x_k) - y_k]^2$$

در مرحله يادگيري گراديان $J(\Theta, x_k, y_k)$ نسبت به پارامترهاي مختلف محاسبه شده ومقادير بردارΘ در جهت عكس گراديان تابع هزينه تغيير مي كند. توضيحات بيشتر در مورد چگونگي عملكرد الگوريتم در مراجع [٤] و [۱۰] آمده است.

ضرب داخلي مستقيم[۱۷]: در اين روش در هر مرحله تابع $F(x)$ با استفاده از يك سري توابع متعامد پايه جديد تقريب زده مي شود. در اولين مرحله كه دقت $m = 0$ ناميده مي شود تابع $F(x)$ به صورت $F_0(x) = \sum_k a_{0,k}\,\phi_{0,k}(x)$ تقريب زده مي شود. در مراحل بعدي هر تقريب جديد تقريب قبلي را بهبود مي بخشد. به عنوان مثال در يك تقريب دلخواه m تابع تقريب به صورت زير خواهد بود.

$$F_{m-1}(x) = F_m(x) + \sum_k d_{m,k}\,\psi_{m,k}(x)$$

در اين حالت ضرائب هر كدام از اين بسط، تصوير عمود تابع اصلي $F(x)$ بر روي توابع پايه خواهد بود[٦]. بنابراين مي توان نوشت :

$$a_{m,k} = \langle \phi_{m,k}(x), F(x) \rangle \quad ,$$

$$d_{m,k} = \langle \psi_{m,k}(x), F(x) \rangle$$

در اين روش توابع پايه ويولت بايد متعامد يكه باشند. همچنين بايد تعداد نمونه هاي كافي از ورودي در دست باشد.

روش يادگيري $\mathbf{L_2}$: در اين روش با استفاده از خواص توابع ويولت ضرائب به شكلي محاسبه مي شوند تا مجموع مربعات خطاي تقريب حد اقل شود. فرض مي كنيم كه بردارهاي ورودي و خروجي نمونه هاي گسسته از يك تابع پيوسته به صورت $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ و $F = [f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)]^T$ باشند. با توجه به اينكه بردارهاي پايه مقياس كننده و ويولت شبيه هم مي باشند براي سادگي آنها را با $\theta(x)$ نشان مي دهيم و ضرائب a و d را با c جايگزين مي كنيم. آنگاه در هر سطح از تقريب مسئله تقريب را مي توان با رابطه $\bar{F}(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\,\theta_k(x)$ بيان كرد. كه در اين رابطه K تعداد توابع پايه مي باشد. اولين تقريب يعني F_0 با استفاده از تابع مقياس كننده بدست مي آيد و تقريب جديد به كمك تقريب قبلي به شكل زير محاسبه ميشود.

$$F_{m-1}(x) = F_m + \sum_k c_{m,k}\psi_{m,k} \qquad m,k \in z$$

كه F_m تقريب قبلي و F_{m-1} تقريب جديد است. پس مي توانيم بگوييم در هر تقريب $\bar{F}(X) = F(X) - F_m(X)$ مي باشد. كه مي توانيم آن را به فرم ماتريسي به صورت $\bar{F}(X) = AC$ نشان داده ميشود. A ماتريس مقادير توابع ويولت و C ماتريس ضرائب مي باشد. بوسيله روش حداقل مربعات ضرائب C از رابطه زير محاسبه مي شوند

$$C = ((AA^T A)^{-1}) A^T)\bar{F} = A^+ \bar{F}$$

اگر ويولتها را متعامد يكه انتخاب كنيم A^TA يك ماتريس واحد خواهد بود و رابطه فوق به شكل نهايي $C = A^T\bar{F}$ تبديل

Gradient Decent [۱٦]

Direct Inner Product[۱۷]

خواهد شد. براي اطلاعات بشتر در باره روشهاي فوق بـه [٦] مراجعـه شود.

٥- تخمين ضرائب ويولت اتوماتاي يادگير

در اين قسمت ٣ الگوريتم مبتني بر اتوماتاهاي يادگير بـراي تخمـين ضرائب ويولت معرفي مي شود. اين الگوريتم هـا بـه جـاي اسـتفاده از يك ساختار ثابت مانند شبكه هاي با آموزش انتشار خطا به عقـب و يـا نزول در امتداد گراديان، از يك ساختار پويا بر خـوردار اسـت. بهمـين دليل نيازي براي اينكه تعداد ويولت ها از قبل مشخص باشد نيـست. همچنين بر خلاف روش يادگيري L2 كـه محاسـبات زيـاد و بدسـت آوردن معكوس يك ماتريس با ابعاد بالا براي تعداد زياد نمونه ها لازمه آن اسـت از محاسـبات كمتـر و بـسيار سـاده تـري برخـوردار اسـت. الگوريتمهاي پيشنهادي همانطور كه در قسمت شبيه سازي نشان داده شده است نتايج نزديك به حداقل خطا را توليد ميكند. اين الگوريتمها براي تقريب از يك مقدار اوليه براي ضريب شروع مي كننـد و سـپس مقدار بهينه براي اين ضريب را در اطراف مقـدار اوليـه جـستجو مـي كنند. مقدار اوليه ضرائب را مي توان با استفاده از ضرب داخلي مقـادير تابع و مقادير ويولتهاي پايه در نقاط خـاص، و يـا بـا اسـتفاده از روش پيشنهاد شده در مرجع [٤] محاسبه كرد. اكنون به شرح الگوريتمهاي پيشنهادي مي پردازيم.

الگوريتم ١ : اولين الگوريتم مبتنـي بـر اتوماتـاي يـادگير بـا سـاختار متغير از نوع L_{RP} ميباشـد. در ايـن الگـوريتم بـه هـر ضـريب يـك اتوماتاي يادگير تخصيص داده ميشود كـه وظيفـه پيـدا كـردن مقـدار بهينه براي ان ضريب را بعهده دارد. هر اتوماتا داراي N اقدام متفـاوت مي باشد كه احتمال انتخاب هر كدام از آنها در ابتدا مساوي و برابر $p_i = 1/N$ مي باشد. هر اقدام مقادير خود را در فاصله $\{k_{min}, k_{max}\}$ اختيار ميكند. اگر مقدار اقـدام انتخـاب شـده توسـط اتوماتـا در يـك مرحله k_c باشد ضريب ويولت استفاده شده توسط الگـوريتم بـراي مرحله بعد k_c برابر ضريب در مرحله فعلي خواهد بود. در هـر مرحلـه ازالگوريتم هر يك از اتوماتاها يكي از اقدامهاي خود را انتخاب ميكنند و با توجه به مقدار انتخاب شده توسـط اتوماتـا مقـدار ضـريب ويولـت مورد نظر براي مرحله بعد انتخاب ميشود. با استفاده از ضـرايب تعـين شده توسط اتوماتاها مقدار جديد تـابع $F_1(x) = \sum_j c_{1,j}\,\theta_{1,j}(x)$ و خطاي تقريب به صورت $e = F(x) - F_1(x)$ محاسبه مي گـردد. اگـر خطاي بدست آمده از خطاي مرحله قبل كمتر باشد اقدام انتخاب شده پاداش مي گيرد و در غير اينصورت جريمه مي شود. بر اسـاس نتيجـه اقدام هر اتوماتا ، بردار احتمالات انتخابهـاي ان اتومانـا تـصحيح مـي شود.

الگوريتم٢: اين الگوريتم مبتني بر اتوماتاي يادگير با سـاختار ثابـت از نوع $L_{2N,2}$ ميباشد. در اين الگوريتم نيز همانند الگـوريتم ١بـراي هر ضـريب ويولـت يـك اتوماتـا تخـصيص داده ميـشود ولـي مقـادير اقدامهاي هر اتوماتا مقادير متفاوت افزايش يا كاهش به ضريب ويولـت در نظر گرفته ميشود. هر اتوماتا داراي k اقدام هر يك با عمق حافظـه N مي باشد. بر اساس اقدام انتخاب شده يك مقدار معـين بـه ضـريب ويولت افزوده ويا كاسته مي شود. در صورتي كه اين افزايش يا كاهش باعث بهبود خطا شود اين عمل تكرار مي شود و در غيـر اينـصورت بـر اساس تعداد دفعات پاسخ ناموفق اقدام تغيير كرده و ميزان افزودن ويـا كاستن به ضريب تغيير ميكند.

الگوريتم ٣: اين الگوريتم مبتني بر اتوماتاي با اقدام پيوسته ميباشـد. در اين الگوريتم به ازاي هر ضريب يك اتوماتا با ساختار پيوسته در نظر گرفته ميشود. الگوريتم يادگيري به صورت زير بيان مي شود.

١- دفعات تكرار (n) را برابر صفر قرار بده

٢- مجموعه اقدامها را براي m پارامتر ويولت به صورت $A(n)=\{k_1(n), k_2(n),..k_m(n)\}$ انتخاب كن

٣- تابع توزيـع احتمـال يكنواخـت $f_i(k_i,n)$ بـراي k_i در تكـرار n را تعريف كن

٤- تابع توزيـع احتمـال $f_i(k_i,n)$ بـراي مقـادير $i=1..m$ در محـدوده تعيين شده مقدار اوليه دهي كن

٥- مراحل زير را تكرار كن تا اينكه خطا به حد معيني برسد.

: $z_i(n)$ ا استفاده از يك توليد كننده اعداد تصادفي انتحاب كن

: $k_i \in A(n)$ را بـــه گونـــه اي انتحـــاب كـــن تـــا

$$\int_{xi\,min}^{ki(n)} f\,(x,n)dx = z_i(n)$$ شود

: اقدام را بر روي سيستم اعمال كن

: $\beta(n)$ را محاسبه كن

: تابع توزيع احتمال $f_i(k_i,n)$ را به هنگام كن

٦- *نتايج شبيه سازي*

در اين قسمت عملكرد الگوريتمهـاي پيـشنهادي بـراي چنـد مثـال نمونه نشان داده شده است.

مثـال اول: در ايـن مثـال يـك سيـستم ديـگ واكنـشي پيوسـته (CSTR)[18] كه در آن يك واكنش شيميايي گرمازاي برگشت پذير در دماي ثابت را مدل سازي مي كنيم. واكـنش انجـام گرفتـه نـسبت بـه غلظت مواد ورودي از درجه يك بـوده كـه توسـط معادلـه زيـر بيـان ميشود.

$$Rate = -k_0 C V e^{-\frac{E}{RT}}$$

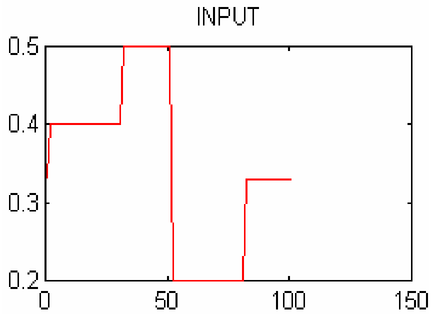
كه در آن V حجم ديگ ، k_0 ضريب واكنش ، C غلظت مواد ورودي ، E/R مقدار ثابت ، T دماي واكـنش و Rate ميـزان واكـنش انجـام شده مي باشد .در اين مثال غلظت مواد ورودي را ثابت در نظر گرفته و دما را كه در حقيقت ميزان جريان آب است بـه عنـوان ورودي فـرض مي كنيم . ورودي از يكصد نقطه كه بـه صـورت يكنواخـت در فاصـله [٠، ١٥٠] ايجاد شده تشكيل شده است. نيمي از ورودي ها كـه بـه صورت يك در ميان انتخاب شده اند براي آموزش و نيمي ديگر براي آزمايش شبكه بكار برده شده اند . ورودي و خروجي اوليـه در شـكل٣ نمايش داده شده است.

---

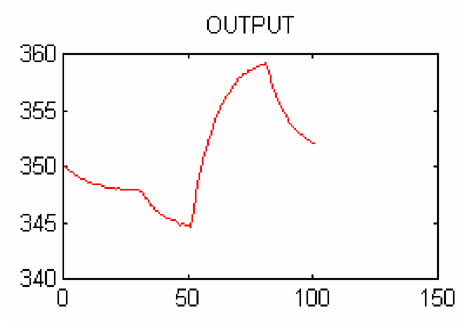
[١٨] - Continuous Stirred Tank Reactor

شبیه سازي براي الگوريتم ١ : اتوماتا داراي يكصد اقدام متفاوت در فاصله [٢٠ ، ٠] با طول گام ٠,٢ مي باشد احتمال انتخاب هر كدام از اين اقدامها در ابتدا مساوي و برابر ٠,٠١ مي باشد. مقدار خطاي متوسط پس از ١٥ بار اجرا و به ازاي مقادير مختلف a وb در جدول شماره ١ و يك نمونه از تقريب در شكل ٤ نشان داده شده است . با توجه به مقادير بدست آمده در جدول شماره ١ كمترين ميانگين مربع خطا براي اتوماتاي متغير با مقادير a = 0.5 , b = 0.5 حاصل شده است.

شبیه سازي براي الگوريتم ٢: در اين قسمت اقدامها را برابر مقادير ثابت افزايش يا كاهش به ضريب در نظر گرفتيم . هر اتوماتا داراي هشت اقدام متفاوت است كه اين اقدامها عبارتند از : [-٠,٥ ، -٠,٣ ، -٠,١٢ ، -٠,٠٥ ، -٠,٠١٢ ، -٠,٠٠٢ ، ٠ ، ٠,٨] . ميانگين مربع خطا و نتايج شبيه سازي شده به ازاي مقادير مختلف عمق در جدول ٢ نشان داده شده است. نتايج جدول شماره ٢ نشان مدهد كه الگوريتم ٢ كه در ان از اتوماتاي با ساختار ثابت استفاده شده است نتايج بهتري را توليد مينمايد. اين موضوع بدليل اين استكه اين اتوماتاي از تجربيات گذشته خود براي تصميم گيري آينده استفاده مي كند و كمترين خطا براي عمق ٢ بدست امده است. افزايش عمق به بيش از ٢ تاثير چنداني روي دقت نداشته است. نتايج شبيه سازي با روش يادگيري L_2 نيز در جدول ٢ امده است.



(a)



(b)

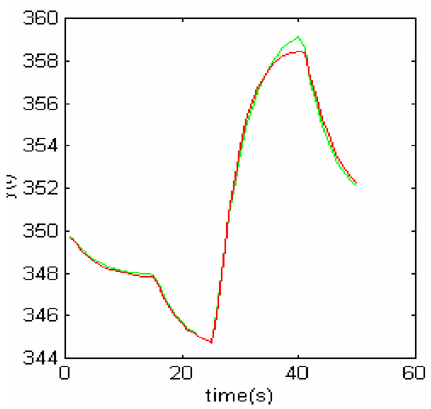
شكل ٣ - (a) ورودي CSTR
(b) خروجي CSTR

جدول ١ : مقادير متوسط خطا ي الگوريتم ١ به ازاي مقادير مختلف **a** و**b**

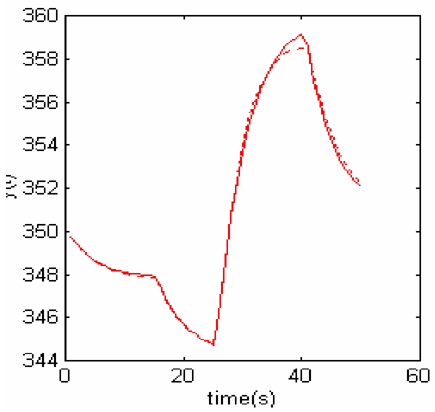
دقت تقريب پارامتر	-٢	-١	٠
a = ٠,٩, b = ٠,١	٠,٠٧٧١	٠,٠٨٤٥١	٠,٠٩٨١١
a = ٠,٨ , b =٠	٠,٠٣٧٤٤	٠,٠٦٢٥٥	٠,١٤٧١
a = ٠,٧ , b = ٠,٩	٠,٠٣١٠١	٠,٠٧٤١	٠,١٣٣٥
a =٠,٧ , b =٠,١	٠,٠٤١٣	٠,٠٧١٢	٠,١٨٥
a =٠,٥ , b = ٠,٥	٠,٠١٩٥	٠,٠٥٢٥	٠,١٠٦٥

جدول ٢ : مقادير متوسط خطا ي براي الگوريتم٢

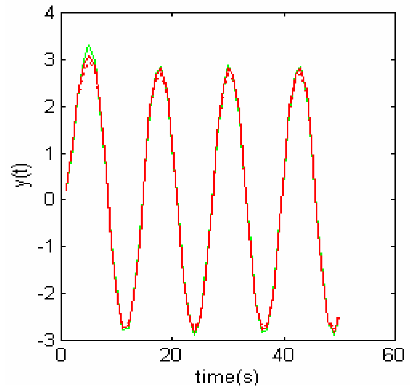
دقت تقريب الگوريتم	-٢	-١	٠
الگوريتم ٢ با عمق ١	٠,٠٣٥٠	٠,٠٥٤٥٨	٠,٠٩٧٣
الگوريتم ٢ با عمق٢	٠,٠١٢١	٠,٠٢٤٥١	٠,٠٨٥٢
الگوريتم٢ با عمق	٠,٠٢٤٢	٠,٠٣٦٥	٠,٠٩٤٨٥
الگوريتم٢ با عمق ٤	٠,٠٢٦٩	٠,٠٣٧٨	٠,٠٩٥٨٦
روش يادگيري L2	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٨٥٩	٠,٠٧٣٦



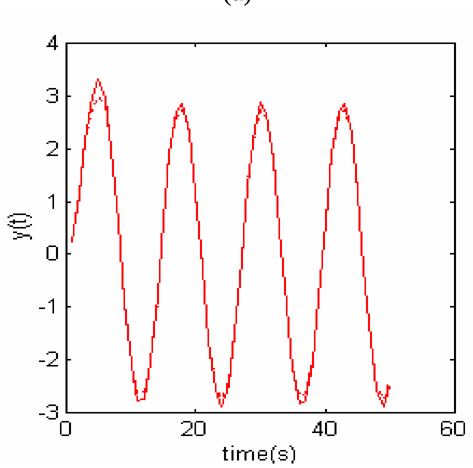
(a)



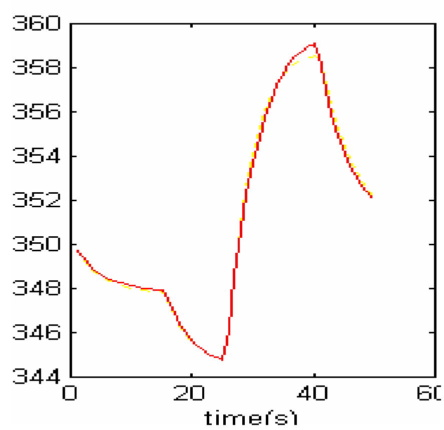
(b)



(a)

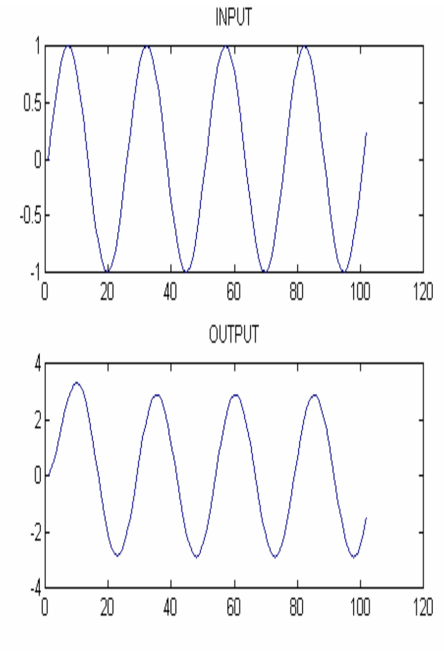


(b)



(c)

شكل٤ - **(a)** : تقريب با دقت ۰ **(b)** : تقريب با دقت ۱-
(c) : تقريب با دقت ۲-
خط پيوسته تابع اصلي خط (- -) تابع تقريب



شكل٥- ورودي خروجي تابع تفاضلي

مثال دوم: در اين مثال يك تابع تفاضلي با ورودي سينوسي كه در زير امده است تقريب زده ميشود.

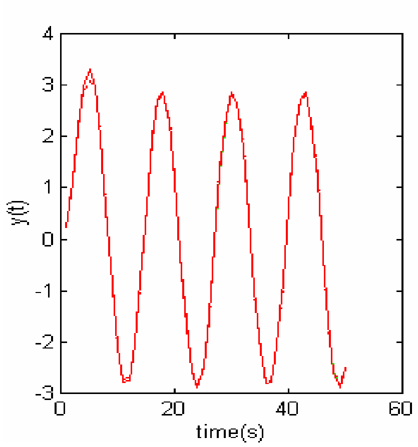
$$y_p(k+1) = f[y_p(k), y_p(k-1)] + u(k)$$

$$f[y_p(p), y_p(k-1)] =$$

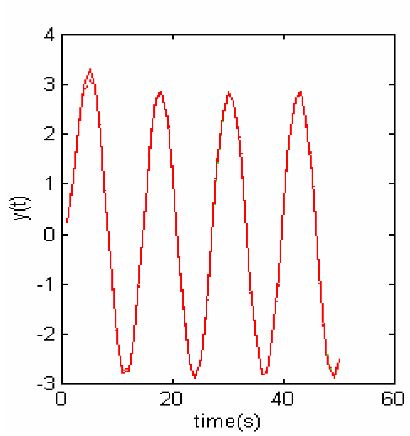
$$(y_p(k)y_p(k-1)[y_p(k)+25]) / (1+y_p^2(k)+y_p^2(k-1))$$

$$u(k) = \sin(2\pi k / 25)$$

ورودي از يكصد نقطه كه به صورت يكنواخت در فاصله [۰ ، ۱۰۰] ايجاد شده تشكيل شده است. ورودي و خروجي اوليه در شكل ٥ نمايش داده شده است. شبيه سازي هم بوسيله اتوماتاي يادگير با ساختار متغير و هم بوسيله اتوماتاي يادگير با ساختار ثابت با شرايط مثال قبل انجام شده است. ميانگين مربع خطا ي متوسط پس از ۱٥ بار اجرا و به ازاي مقادير مختلف a وb در جدول شماره ۳ و ميانگين مربع خطا به ازاي مقادير مختلف عمق در جدول ٤ و يك نمونه از تقريب در شكل ٦ نشان داده شده است .



(c)



(d)

شکل۵ - **(a)**: تقريب با دقت ۰ **(b)**: تقريب با دقت -۱ **(c)**: تقريب با دقت -۲ **(d)** تقريب با دقت -۳ خط پيوسته تابع اصلي خط (- -) تابع تقريب

جدول۳ : مقادير متوسط خطا ي اتوماتاي متغير به ازاي مقدار ثابت **a** ومقادير مختلف**b**

دقت تقريب پارامتر	-۲	-۱	۰
a = ۰,۸ , b = ۰,۱	۰,۰٦٥٧	۰,۰۸۳۲	۰,۰۹۲۱
a = ۰,۸ , b =۰,۲	۰,۰۸۷٤	۰,۰۹۸٤٥	۰,۲۱٤۳
a =۰,۸ , b =۰,۳	۰,۰٥۳٤	۰,۰٦۷۳۲	۰,۱۸٥٤
a =۰,۸ , b =۰,٤	۰,۰٤۹۸	۰,۰٥٤۷۱	۰,۱۷٤٥
a =۰,۸ , b = ۰,٦	۰,۰٤۷۲	۰,۰٥٦۳	۰,٦٤۸٥
a = ۰,۸ , b =۰,۸	۰,۰۲۱٦	۰,۰۳۲٤	۰,۱٤۳٥

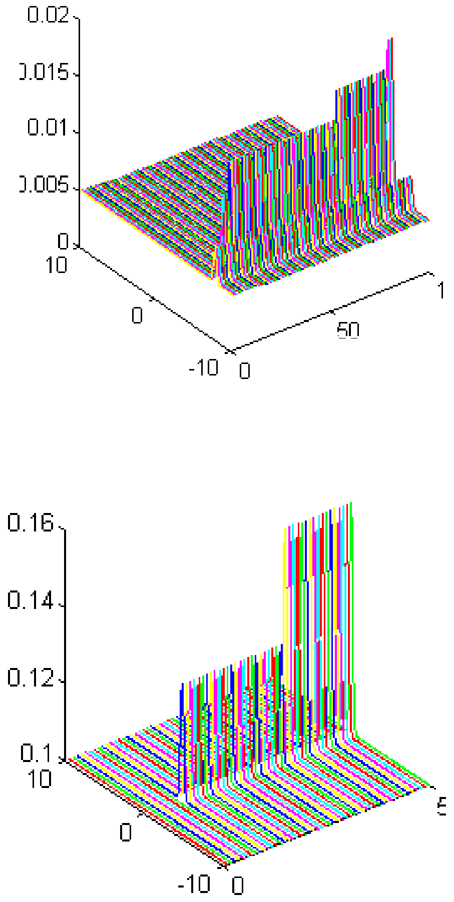
جدول ٤ : مقادير متوسط خطا ي براي الگوريتمهاي ۲و۳

دقت تقريب الگوريتم	-۲	-۱	۰
الگوريتم ۳	۰,۰۹۸٤۱	۰,۱٦٤٤	۰,۱۹۲۳
الگوريتم ۲ با عمق ۱	۰,۰۲۷۸۳	۰,۰٦۷۳۸	۰,۱۰۲۳
الگوريتم ۲ با عمق ۲	۰,۰۱٤۷	۰,۰۲٦٦۹	۰,۰٦۷۸
الگوريتم ۲ با عمق ۳	۰,۰۲۹۸۸	۰,۰٤۷۳	۰,۰۸۷۳۲
الگوريتم ۲ با عمق ٤	۰,۰۳۲۹	۰,۰٥٦٤۳	۰,۱۰۰۳٤
روش يادگيري L2	۰,۰۰۰۱۱	۰,۰۰۲۳٤	۰,۰۹۸٤

مثال سوم: در اين مثال تابع زير با استفاده از سه الگوريتم ۱ و ۳ و الگوريتم آموزش نزول در امتداد گراديان تقريب زده شده است.

$$F(x)=\begin{cases} -2.186x-12.864 & -10\le x<-2 \\ 4.246x & -2\le x<0 \\ \sin((0.03x+0.7)x) & 0\le x<10 \end{cases}$$

براي تقريب تابع از ٤۰۰ نمونه كه به صورت يكنواخت در فاصله [۱۰ ،۱۰-] نمونه برداري شده استفاده شده است. ۲۰۰ نمونه براي محاسبه تقريب و ۲۰۰ نمونه براي آزمون تقريب تابع به كار برده شده است. تابع ويولت به كار برده شده براي هر سه الگوريتم تابع گوسي $\psi(x) = \mathrm{EXp}(-\frac{1}{2}x^2)$ مي باشد. در اتوماتاي پيوسته براي هر ضريب يك اتوماتا با تابع توزيع احتمال پيوسته به كار برده شده است. چگونگي عملكرد اين اتوماتا به اين ترتيب است كه تابع توزيع احتمال در همسايگي بهترين اقدام به سمت ماكزيمم خود ميل مي كند. همانگونه كه در شكل ٦ نشان داده شده است بهترين مقادير بدست آمده براي دو ضريب اول به سمت ۹٥/- و ۰/۰۱ ميل مي كند كه مقدار واقعي آنها ۰/۷۰٦۳- و ۰/۰۱۹۲- مي باشد. به منظور مقايسه چهار پارامتر اول بدست آمده با الگوريتمهاي مختلف در جدول ٥ و يك نمونه از تفريب در شكل۷ و مقادير متوسط خطا ي تقريب در جدول ٦ نشان داده شده است .



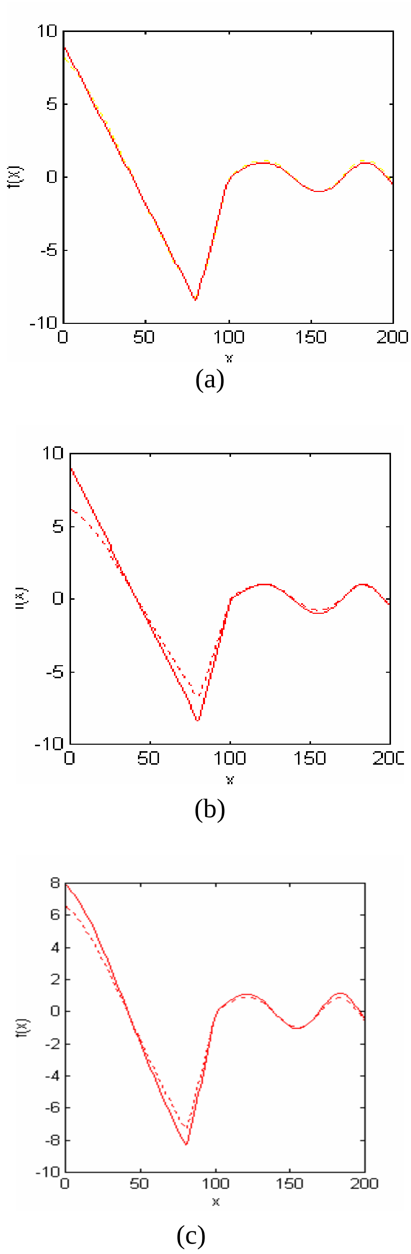
شکل٦ - تابع توزیع احتمال بر اساس تعداد دفعات تکرار

جدول ٥ : چهار پارامتر اول بدست آمده با الگوریتمهاي مختلف

شماره پارامترها / الگوریتم	١	٢	٣	٤
الگوریتم ٣	-٠,٩٠٦	٠,٠١٩	٠,٠٣١٣	٠,٠٣٩٧
الگوریتم ١	-١,٤٨٣	-٠,٠٠٧٦	٠,٠٤٦٤	٠,٠٤٦
ویونت	-٤,٢٢٧	-٠,٠١٥	٠,٨٣٨٦	٠

جدول ٦ : مقادیر متوسط خطا ي تقریب براي الگوریتمهاي مختلف

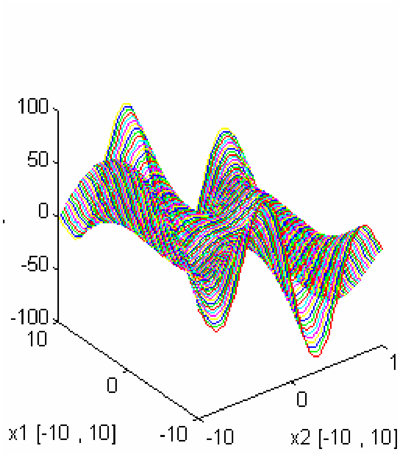
تعداد پارامترها / الگوریتم	٢	٦	١٤
الگوریتم ٣	٠,١٤٥٢	٠,٠٩٧٨	٠,٠٠٩٣٤
الگوریتم ١	٠,١٩١١	٠,١٢٦٤	٠,٠٦٧٥١
ویونت	٠,٢٧٣٦	٠,٢١٥٨	٠,١٣٢٨



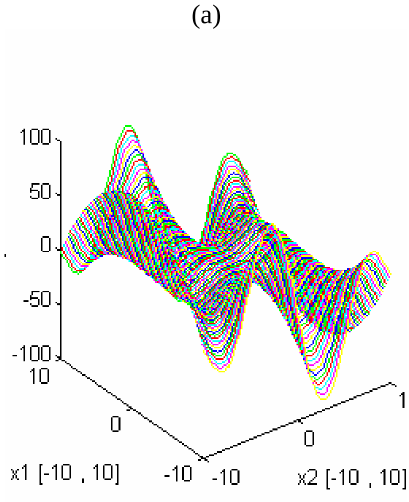
شکل ٧ - **(a):** تقریب تابع با استفاده الگوریتم ٣
(b): تقریب تابع توسط شبکه عصبي
(c) : تقریب تابع با استفاده الگوریتم ١
خط پیوسته تابع اصلي خط (- -) تابع تقریب

مثال چهارم : به عنوان آخرین مثال تقریب تابع دو متغیره $F(x) = (x_1^2 - x_2^2)\sin(0.5\,x_1)$ در فاصله x=[-10,10] را با استفاده از الگوریتم ٣ نشان مي دهیم .تابع ویولت استفاده شده گوسي دو متغیره $\psi(x) = x_1 x_2 \,EXp(-\frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2))$ انتخاب شده است. جهت شبیه سازي به ازاي هر پارامتر تقریب یك آتوماتاي پیوسته كه كه اقدام ان در فاصله فاصله [٥٠،٠] تغییر مي كند در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه سازي براي سه روش آموزش در امتداد نزول

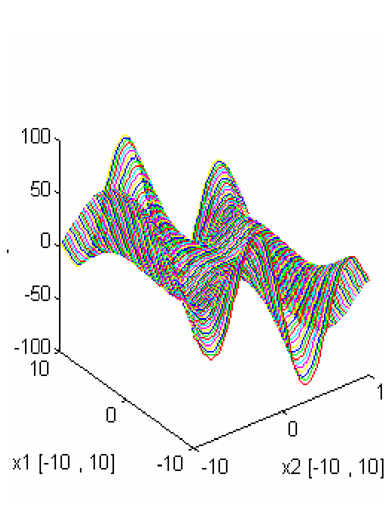
گراديان و الگوريتم و آتوماتاي پيوسته   در شكل۸ و خطاي بدست آمده در جدول ۷ نشان داده شده است . ميزان متوسط خطاي بدست آمده پس از بيست بار تكرار براي اموزش در جهت نزول گراديان برابر ۰/ ۰۷۵ و براي الگوريتمهاي ۱و۳ بترتيب ۰,۰۱۶۷ و ۰/ ۰۱۲۷ مي باشد.



(a)



(b)



(c)

شكل۸ - (a): تابع اصلي (b). تقريب تابع توسط الگوريتم۳

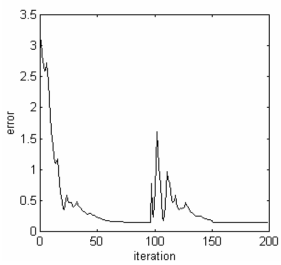
(c). تقريب تابع توسط الگوريتم ۱

جدول ۷ : مقادير متوسط خطا ي تقريب براي الگوريتم هاي ۱ و ۳

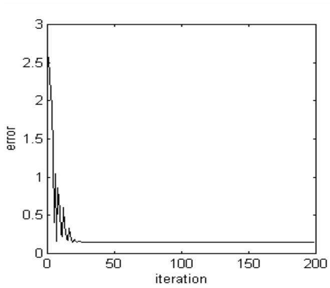
تعداد پارامتر	٦	٢
الگوريتم ۱	۰,۰۱٦۷	۰,۳۷٤۲
الگوريتم ٤	۰,۰۱۲۷	۰,٤٥٦٤
ويونت	۰,۰۷٥۲۳	۰,٥۲۳٤

۷-نتيجه گيري

در اين مقاله ۳ الگوريتم مبتني بر اتوماتاي يادگير براي محاسبه ضرائب ويولت ارائه گرديده است. اين الگوريتمها خاصيت سلسله مراتبي ويولتها را حفظ كرده و به صورت پويا عمل مي كنند. نكته اي كه بايد مورد توجه قرار گيرد اين است كه اتوماتاي يادگير مقادير بهينه پارامترها را بين دو مقدار حداقل و حد اكثر جستجو مي كند بنابر اين بايد از قبل اطلاعاتي در مورد مقادير حداقل و حداكثر پارامترها در دست باشد. در مورد مسائل كاربردي با توجه به اينكه محدوده عملياتي سيستم از قبل قابل پيش بيني مي باشد بدست آوردن مقادير حداقل و حد اكثر پارامترها امكان پذير است اما در مورد ساير مسائل مي توان از روشهاي ديگر مانند ضرب مسقيم ،يك مقدار شروع اوليه براي هر پارامتر بدست آورد سپس مقدار بهينه را اطراف اين مقدار اوليه جستجو كرد. نكته ديگري كه در اين الگوريتمها قابل توجه مي باشد اين است كه در هر مرحله ميتوان فقط يك ويولت اضافه نمود و آنهايي را كه كمكي به بهبود تقريب نمي كنند حذف كرد. بنابر اين با حفظ دقت تقريب ميتوان تعداد پارامترها يعني ويولت ها را كاهش داد. به عبارت ديگر الگوريتمهاي پيشنهادي بطور اتوماتيك تعداد ويولتهاي مورد نياز را تعيين ميكند. نتايج به دست آمده را مي توان به شرح زير خلاصه نمود. ۱- روشهاي پيشنهادي هم در تقريب تابع و هم در پيش بيني تابع در نقاط بين نقاط نمونه برداري شده بهتر از شبكه هاي عصبي با آموزش در امتداد نزول گراديان عمل مي كنند. ۲- خطاي بدست آمده از اتوماتاي پيوسته كمتر از دو اتوماتاي ديگر است. ۳- اتوماتاي اتوماتاي پيوسته سريعتر همگرا مي شود. چگونگي كاهش خطاي تقريب با توجه به دفعات تكرار براي الگوريتم ۳ در شكل ۹ نشان داده شده است. همانگونه كه مشاهده مي شود در الگوريتم ۳ خطا پس از نوسانات اوليه سريعاً كاهش يافته و به سمت مقدار پايدار خود ميل ميكند اما در آموزش در امتداد نزول گراديان خطا پس كاهش بدليل ناهمواري سطح جستجو و تغيير گراديان تابع ارزيابي دوباره ممكن است حالت نوساني پيدا كند..



(a)



(b)

شكل ۹ - كاهش خطاي تقريب نسبت به تعداد دفعات تكرار

(a) : ويونت **(b)** : اتوماتاي يادگير

مراجع

[1] T. Poggio and F. Girosi, "Networks for Approximation and Learning", Proc. IEEE, vol. 78, no. 9, sept. 1990.

[2] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Information Theory, vol. 36 , 1990.

[3] S. G. Mallat, "A Theory or Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation ", IEEE Trans. PAMI, vol. 11 , 1989.

[4] Q. Zhang and A.Benveniste. "Wavelet Networks ", IEEE Trans. on Neural Networks, no. 6, pp. 889-898, 1992.

[5] B. R. Bakhshi and G. Stephanopoulos, "Wave-Net: a Mmultiresolution, Hierarchical Neural Nnetworks with Localized Learning", AICHE Journal, no. 1, 1993.

[6] A. A. Safavi "On the Learning Algorithms of Wave-net " , Proceedings of Fifth Iranian Conference on Electrical Engineering, 1997.

[7] A. Grossman and J. .Morlet, "Decomposition of Hardly Functions into Square Integrable Wavlets", SIAM. Math . Anal 1984.

[8] I. Daubechies, "Orthonormal Basis of Compactly Suported Waveles", Communications on Pure and Applied Math., vol. 41, pp. 909-999, 1988.

[9] S. Rao and R. S. Pappu, "Hierarchical Wavelet Neural Networks ", IEEE Trans. on Neural networks, 1993.

[10] K. S. Narendra and M.A.L Thathachar, Learning Automata : An Introduction, Printice -Hall , 1989.

[11] K. S. Narendra and M.A.L Thathachar, "Learning Automata - A Survey", IEEE Trans. SMC 4, 1974.

[12] P. Mars , K. S. Narendra. and M. Chrystall, " Learning Automata Control of Computer Communication Networks", Proc. of Third Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale University, 1983.

[13] M. R. Meybodi and S. Lakshmivarhan, "Optimality of a General Class of Learning Algorithm, Information Science, Vol. 28, pp. 1-20, 1982.

[14] M. R. Meybodi and S. Lakshmivarhan , "On a Class of Learning Algorithms which have a Symmetric Behavior Under Success and Failure", Springer Verlag Lecture Notes in Statistics, pp.145-155,1984.

[15]M.N. Howell and T. J. Gordon, Continous Learning Automata and Adaptive Digital Designs, Proceedings of UKACC International Conference on Control, PP. 100-105, 1998.